

KESTABILAN MODEL NICHOLSON-BAILEY

MIRA OKTAVIANI, ZULAKMAL*

*Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : oktavianim914@gmail.com, zulakmal@sci.unand.ac.id*

Abstrak. Dalam makalah ini dikaji kestabilan Model Nicholson-Bailey yang mempelajari tentang interaksi antara inang dan parasit. Model Nicholson-Bailey digambarkan dalam bentuk persamaan beda non linier diskrit. Dari hasil analisis diperoleh dua titik tetap yang kestabilannya ditentukan oleh tingkat reproduksi inang. Sebagai hasil utama dari penelitian ini disajikan suatu syarat perlu dan cukup untuk kestabilan asimtotik dari titik tetap model Nicholson-Bailey.

Kata Kunci: Model Nicholson-Bailey, Persamaan Beda Non Linier, Kestabilan Titik Tetap

1. Pendahuluan

Inang dan parasit merupakan spesies-spesies yang saling berinteraksi untuk kelangsungan hidupnya masing-masing. Salah satu contoh interaksi dari inang dan parasit ini adalah tawon braconid dan inangnya. Tawon braconid sebagai parasit yang akan menyerang inang yaitu wereng, kepik, ulat, kutu dan serangga lain. Tawon braconid adalah salah satu spesies serangga yang bermanfaat dalam pertanian, karena hidup pada inang-inang yang merupakan hama pertanian [9]. Wereng dan kutu-kutuan merupakan spesies serangga ordo Homoptera, salah satunya yaitu wereng coklat yang menjadi hama pada tanaman padi [6].

Model Nicholson-Bailey merupakan kajian matematika yang mempelajari tentang interaksi antara inang dan parasit [8]. Secara umum, model Nicholson-Bailey diberikan dalam bentuk sistem persamaan beda berikut[7]:

$$\begin{aligned}x(n+1) &= \mu x(n) f(x(n), y(n)) \\ y(n+1) &= \ell x(n)[1 - f(x(n), y(n))],\end{aligned}\tag{1.1}$$

dengan $x(n)$ menyatakan jumlah populasi inang dewasa pada musim n , $y(n)$ menyatakan jumlah populasi parasit dewasa pada musim n , dan $\mu > 1$ menyatakan laju reproduksi inang. Fungsi $f(x(n), y(n))$ adalah fraksi dari larva inang yang tidak terinfeksi parasit. Kemudian, $x(n)[1 - f(x(n), y(n))]$

*Corresponding author

merupakan kepadatan bersih larva inang yang terinfeksi, dengan setiap larva inang menghasilkan ℓ parasit dewasa pada musim berikutnya [7]. Dalam [11] diberikan modifikasi model Nicholson-Bailey dalam bentuk sistem persamaan beda berikut:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \frac{Rx(n)}{(1+x(n))^c} e^{-ay(n)} \\ y(n+1) &= x(n)(1 - e^{-ay(n)}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Pada model (1.2), $\mu = \frac{R}{(1+x(n))^c}$, $f(x(n), y(n)) = e^{-ay(n)}$ dan mengambil kesuburan parasit (ℓ) sebagai 1, dengan a merupakan bilangan positif yang menyatakan tingkat kemampuan parasit untuk mendapatkan inang dan c menyatakan tingkat *feedback* inang dan parasit. Qureshi, dkk., mengajukan modifikasi model Nicholson-Bailey dalam bentuk sistem persamaan beda berikut:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Rx(n) e^{-a\sqrt{y(n)}}, \quad x(0) = x_0 \\ y(n+1) &= x(n)(1 - e^{-a\sqrt{y(n)}}), \quad y(0) = y_0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

dengan $R, a, x_0, y_0 \in \mathbb{R}^+$ dan R menyatakan jumlah keturunan inang yang tidak terkena parasit dan bertahan hidup pada musim berikutnya [10].

2. Landasan Teori

2.1. Teori Matriks

Matriks adalah kumpulan bilangan-bilangan yang disusun menurut baris dan kolom dalam bentuk persegi atau persegi panjang. Matriks A dengan m baris dan n kolom disebut sebagai matriks berukuran $m \times n$ dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks persegi $A_{n \times n}$ dikatakan memiliki invers jika terdapat matriks $M_{n \times n}$ sedemikian sehingga

$$AM = MA = I,$$

dengan $I_{n \times n}$ adalah matriks identitas. Matriks A dikatakan non-singular jika $\det(A) \neq 0$, dan sebaliknya matriks A dikatakan singular jika $\det(A) = 0$ [4].

Definisi 2.1. [4] Misalkan A adalah matriks $n \times n$. Vektor tak nol \mathbf{y} di \mathbb{R}^n disebut vektor *eigen* bagi A jika $A\mathbf{y}$ adalah kelipatan skalar dari \mathbf{y} , yaitu

$$A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y} \quad (2.1)$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut *nilai eigen* dari A , yang berkaitan dengan vektor *eigen* \mathbf{y} .

Untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks $A_{n \times n}$, tulis (2.1) sebagai berikut:

$$(\lambda I - A)\mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) merupakan suatu sistem persamaan linier homogen. Agar persamaan (2.2) memiliki solusi tak nol \mathbf{y} , maka mestilah

$$\det(\lambda I - A) = 0. \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) disebut sebagai persamaan karakteristik bagi matriks A [4].

2.2. Sistem Persamaan Beda dan Kestabilannya

Sistem persamaan beda adalah suatu sistem persamaan yang bentuk umumnya dapat ditulis sebagai berikut :

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(n)), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (2.4)$$

Sistem persamaan (2.4) dikatakan linier jika \mathbf{f} linier, dan sebaliknya sistem persamaan (2.4) dikatakan non-linier jika \mathbf{f} non-linier [1]. Bentuk khusus persamaan beda linier dapat ditulis sebagai berikut :

$$\mathbf{y}(n+1) = A\mathbf{y}(n), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \quad (2.5)$$

Kestabilan titik tetap dari suatu sistem merupakan salah satu kajian dari sistem persamaan beda. Disebutkan dalam [1] bahwa, suatu titik $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^n$ dikatakan titik tetap dari sistem (2.4) jika

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) = \mathbf{y}^*. \quad (2.6)$$

Untuk sistem linier, suatu titik \mathbf{y}^* merupakan titik tetap dari sistem (2.5) jika

$$A\mathbf{y}^* = \mathbf{y}^*, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) dapat ditulis dalam bentuk $(I - A)\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$, dengan I adalah matriks identitas $n \times n$. Jika $(I - A)$ non singular, maka $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ adalah satu-satunya titik tetap. Sedangkan jika $(I - A)$ singular, maka terdapat tak hingga banyaknya titik tetap [5].

Definisi 2.2. [1] Titik tetap \mathbf{y}^* dari sistem (2.4) dikatakan :

1. stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*\| < \delta$ maka $\|\mathbf{y}(n) - \mathbf{y}^*\| < \varepsilon$ untuk semua $n \geq 0$,
2. stabil asimtotik jika ia stabil dan terdapat δ_1 sedemikian sehingga jika $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*\| < \delta_1$ maka $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(n) - \mathbf{y}^*\| = 0$,
3. tidak stabil jika bagian 1 tidak terpenuhi.

Dalam [2] disebutkan bahwa kestabilan titik tetap dari sistem (2.4) dapat diperiksa dengan melinierkan sistem tersebut di sekitar titik tetap \mathbf{y}^* dengan menggunakan ekspansi deret Taylor [5].

Secara umum di \mathbb{R}^n berlaku

$$J_{\mathbf{y}^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{y}^*)}{\partial y_1(n)} & \frac{\partial f_1(\mathbf{y}^*)}{\partial y_2(n)} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{y}^*)}{\partial y_m(n)} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{y}^*)}{\partial y_1(n)} & \frac{\partial f_2(\mathbf{y}^*)}{\partial y_2(n)} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{y}^*)}{\partial y_m(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{y}^*)}{\partial y_1(n)} & \frac{\partial f_m(\mathbf{y}^*)}{\partial y_2(n)} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{y}^*)}{\partial y_m(n)} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

Matriks $J_{\mathbf{y}^*}$ disebut sebagai matriks Jacobian dari \mathbf{f} pada titik tetap \mathbf{y}^* .

Definisi 2.3. [2] Misalkan \mathbf{y}^* adalah titik tetap dari sistem persamaan (2.4) dan $J_{\mathbf{y}^*}$ adalah matriks Jacobian dari \mathbf{f} di sekitar titik tetap \mathbf{y}^* . Titik tetap \mathbf{y}^* dikatakan titik tetap hiperbolik jika tidak ada nilai eigen dari matriks $J_{\mathbf{y}^*}$ yang modulusnya 1.

Teorema 2.4. [2] Titik tetap hiperbolik \mathbf{y}^* dari sistem persamaan beda (2.4) adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika modulus dari semua nilai eigen matriks Jacobian $J_{\mathbf{y}^*}$ kurang dari 1.

Teorema 2.5. [3] Misalkan λ_1 dan λ_2 adalah akar dari persamaan kuadrat

$$\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \quad (2.9)$$

dengan $B, C \in \mathbb{R}$. Syarat perlu dan cukup agar $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$ adalah $|B| < 1 + C < 2$.

3. Pembahasan

Untuk menganalisis perilaku model (1.3), perlu ditentukan terlebih dahulu titik tetap dari sistem (1.3) dengan menggunakan syarat (2.6). Misalkan (x^*, y^*) adalah titik tetap yang diinginkan, maka

$$\begin{aligned} x^* &= Rx^* e^{-a\sqrt{y^*}} \\ y^* &= x^*(1 - e^{-a\sqrt{y^*}}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dari (3.1), diperoleh bahwa $(x^*, y^*) = (0, 0)$ adalah suatu titik tetap dari sistem (1.3). Selanjutnya, untuk $x^* \neq 0$ dan $y^* \neq 0$ dari sistem persamaan (3.1) diperoleh

$$y^* = \left(\frac{1}{a} \ln(R) \right)^2. \quad (3.2)$$

dan

$$x^* = \frac{R}{R-1} \left(\frac{1}{a} \ln(R) \right)^2. \quad (3.3)$$

Sehingga, $(x^*, y^*) = \left(\frac{R}{R-1} \left(\frac{1}{a} \ln(R) \right)^2, \left(\frac{1}{a} \ln(R) \right)^2 \right)$ merupakan titik tetap dari sistem (1.3).

Selanjutnya, dengan menggunakan sistem (2.8), matriks Jacobian dari sistem (1.3) adalah

$$\begin{aligned} J &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x(n+1)}{\partial x(n)} & \frac{\partial x(n+1)}{\partial y(n)} \\ \frac{\partial y(n+1)}{\partial x(n)} & \frac{\partial y(n+1)}{\partial y(n)} \end{bmatrix} \\ J &= \begin{bmatrix} R e^{-a\sqrt{y(n)}} & -\frac{aRx(n) e^{-a\sqrt{y(n)}}}{2\sqrt{y(n)}} \\ 1 - e^{-a\sqrt{y(n)}} & \frac{ax(n) e^{-a\sqrt{y(n)}}}{2\sqrt{y(n)}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matriks Jacobian di titik tetap $(0, 0)$ adalah

$$J_0 = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari J_0 adalah

$$\lambda_1 = R \text{ dan } \lambda_2 = 0.$$

Berdasarkan Definisi 2.3, titik $(0,0)$ adalah titik tetap hiperbolik jika $R \neq 1$. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 2.4, titik tetap $(0,0)$ adalah stabil asimtotik jika $|\lambda| < 1$, maka mestilah $0 < R < 1$.

Matriks Jacobian di titik tetap $\left(\frac{R}{R-1}, \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2, \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2\right)$ adalah

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{R \ln(R)}{2(R-1)} \\ \frac{R-1}{R} & \frac{\ln(R)}{2(R-1)} \end{bmatrix}.$$

Polinomial karakteristik $J(x^*, y^*)$ adalah

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \left(1 + \frac{\ln(R)}{2(R-1)}\right) \lambda + \frac{R \ln(R)}{2(R-1)}. \quad (3.4)$$

Misalkan $B = -\left(1 + \frac{\ln(R)}{2(R-1)}\right)$ dan $C = \frac{R \ln(R)}{2(R-1)}$.

Nilai eigen dari $J(x^*, y^*)$ adalah akar dari polinomial (3.4), yaitu

$$\lambda_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$$

Berdasarkan Teorema 2.5, $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$ jika dan hanya jika $|B| < 1 + C < 2$. Dari hubungan ini diperoleh

$$|B| < 1 + C \iff 1 < R. \quad (3.5)$$

$$1 + C < 2 \iff R \ln(R) - 2R + 2 < 0. \quad (3.6)$$

Misalkan $F(R) = R \ln(R) - 2R + 2$. Berdasarkan (3.5) dan (3.6), $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$ jika dan hanya jika $R > 1$ dan $F(R) < 0$. Dengan demikian, diperoleh bahwa $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$ jika dan hanya jika $1 < R < R_0$ dengan R_0 adalah akar dari $F(R)$ dalam $(1, \infty)$. Akar dari persamaan $F(R)$ adalah $R_0 \approx 4.9215536345$. Dengan demikian, diperoleh teorema berikut

Teorema 3.1. *Titik tetap*

$(x^*, y^*) = \left(\frac{R}{R-1}, \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2, \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2\right)$ dari sistem (1.3) adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika

$$1 < R < R_0 \quad (3.7)$$

dimana $R_0 > 1$ adalah akar dari persamaan $F(R) = R \ln(R) - 2R + 2 = 0$.

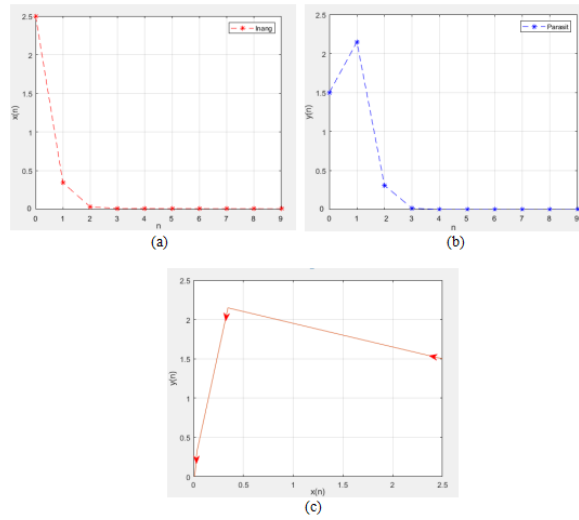
Sebagai ilustrasi, berikut diberikan beberapa contoh yang memperlihatkan kestabilan model Nicholson-Bailey (1.3).

Contoh 1. Untuk titik tetap $(0,0)$, misalkan $a = 1.6$, $x_0 = 2.5$, $y_0 = 1.5$, dan $R = 0.98$. Grafik solusi dari sistem diberikan dalam Gambar 1.

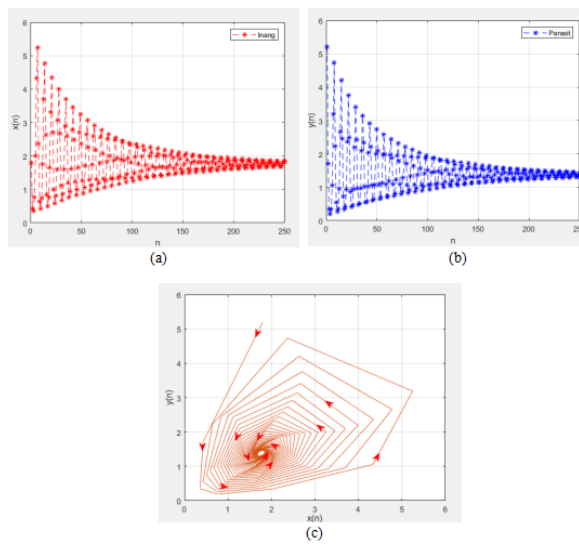
Contoh 2. Untuk titik tetap (x^*, y^*) dengan $x \neq 0$ dan $y \neq 0$ misalkan $a = 1.3$, $x_0 = 1.8$, $y_0 = 5.2$, dan $R = 4.6$. Sehingga, $\left(\frac{R}{R-1}, \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2, \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2\right) = (1.760799, 1.378016)$. Diperoleh bahwa $|\lambda_{1,2}| = 0.987411$. Berdasarkan Teorema 2.5, titik tetap $(1.760799, 1.378016)$ adalah stabil asimtotik. Grafik solusi dari sistem

diberikan dalam Gambar 2.

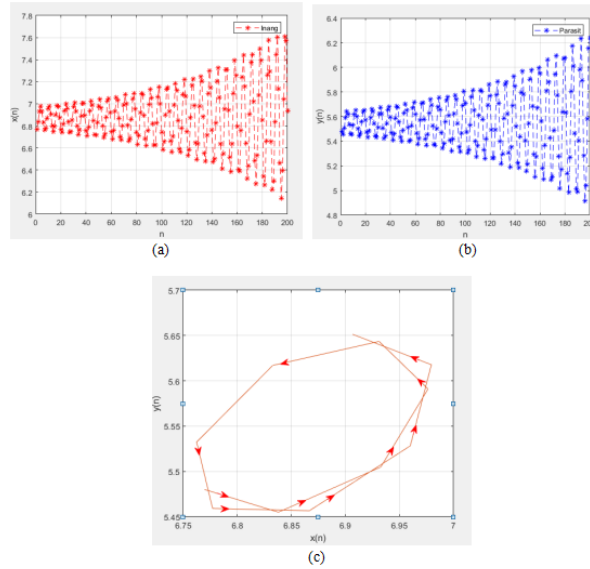
Contoh 3. Untuk titik tetap (x^*, y^*) dengan $x \neq 0$ dan $y \neq 0$ misalkan $a = 0.7$, $x_0 = 6.77$, $y_0 = 5.48$, dan $R = 5.2$. Sehingga, $\left(\frac{R}{R-1} \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2, \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2\right) = (6.867829, 5.547092)$. Diperoleh bahwa $|\lambda_{1,2}| = 1.010247$. Berdasarkan Teorema 2.5 titik tetap $(6.867829, 5.547092)$ tidak stabil asimtotik. Grafik solusi dari sistem diberikan dalam Gambar 3.



Gambar 1. (a) Grafik $x(n)$ (b) Grafik $y(n)$ (c) Grafik Solusi untuk $R = 0.98$.



Gambar 2. (a) Grafik $x(n)$ (b) Grafik $y(n)$ (c) Grafik Solusi untuk $R = 4.6$.



Gambar 3. (a) Grafik $x(n)$ (b) Grafik $y(n)$ (c) Grafik Solusi untuk $R = 5.2$.

4. Kesimpulan

Model (1.3) memiliki titik tetap $(0,0)$ dan $\left(\frac{R}{R-1} \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2, \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2\right)$. Titik tetap $(0,0)$ adalah stabil asimtotik jika $0 < R < 1$. Sedangkan, titik tetap $\left(\frac{R}{R-1} \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2, \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2\right)$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $1 < R < R_0$ dengan R_0 adalah akar dari persamaan $F(R) = R \ln(R) - 2R + 2 = 0$.

Selain itu, kestabilan di titik tetap $(0,0)$ bermakna bahwa inang dan parasit punah jika $n \rightarrow \infty$. Di titik tetap $\left(\frac{R}{R-1} \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2, \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2\right)$ inang dan parasit hidup secara berdampingan, yaitu inang mendekati $\frac{R}{R-1} \left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2$ dan parasit mendekati $\left(\frac{1}{a} \ln(R)\right)^2$ bila $n \rightarrow \infty$.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Susila Bahri, Ibu Dr. Haripamyu, dan Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi yang telah memberikan masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Elaydi, S.. 2005. *An Introductions to Difference Equations*. Edisi ke-3. Springer. New York
- [2] Galor, O.. 2006. *Discrete Dynamical System*. Springer. Providence, USA.
- [3] Grove, E.A., dan G. Ladas. 2004. *Periodicities in Nonlinear Difference Equations*. Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton.

- [4] Howard, A., dan Rorres, C.. 2014. *Elementary Liner Algebra*. Edisi ke-11. John Wiley & Sons, Inc. Canada
- [5] Kelley, Walter G., dan Peterson, Allan C.. 2001. *Difference Equations*. Academic Press. USA
- [6] Kuswardani, Retna Astuti, dan Maimunah. 2013. *Buku Ajar : Hama Tanaman Pertanian*. Universitas Medan Area. Medan
- [7] Misra, J.C. dan A. Mitra. 2005. Instabilities in Single-Species and Host-Parasitoid Systems : Period Doubling Bifurcations and Chaos, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 52 : 525-538
- [8] Nicholson, A.J., dan V.A. Bailey. 1935. The balance of animal populations. part 1, *Proc. of Zoological Society of London*, Vol. 3 : 551-598
- [9] Nuraeni, Yeni, dkk. 2014. Keanekaragaman Serangga Parasitoid untuk Pengendalian Hama pada Tanaman Kehutanan. *Biodiversitas*
- [10] Qureshi M.N., dkk. 2014. Asymptotic behavior of a Nicholson-Bailey model, *Advanced in Difference Equation*, Vol. 2014 : 62
- [11] Ufuktepe, U. dan Kapcak S.. 2013. Stability Analysis of Host Parasite Model, *Advanced in Difference Equation*, Vol. 2013 : 79